ANOVA Hipotez Testi Nedir?

ANOVA (Analysis of Variance), iki veya daha fazla grup ortalamasını karşılaştırmak için kullanılan bir istatistiksel testtir. Temelde, gruplar arasındaki ortalama farklarının istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını değerlendirmek için kullanılır. Tek yönlü ANOVA, tek bir bağımsız değişkenin etkisini incelerken, çok yönlü ANOVA birden fazla bağımsız değişkeni değerlendirebilir.

Varsayımları:

1. **Normallik:** Her bir grubun verilerinin normal dağılıma sahip olması gerekir.
2. **Varyansların Homojenliği:** Grupların varyansları birbirine eşit olmalıdır (homoscedasticity).
3. **Bağımsızlık:** Gözlemler birbirinden bağımsız olmalıdır.

Regresyon Analizi ile Farklar ve İlişkiler:

- **Benzerlik:** Hem ANOVA hem de regresyon analizleri, gruplar arasındaki ortalamaları karşılaştırmak ve değişkenler arasındaki ilişkileri belirlemek için kullanılır.
- **Fark:** ANOVA, farklı grupların ortalamalarının karşılaştırılmasına odaklanırken, regresyon analizi, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi tahmin etmeye çalışır. Regresyonda bağımsız değişken sürekli veya kategorik olabilir, ancak ANOVA'da genellikle bağımsız değişkenler kategoriktir.

ANOVA (Tek Yönlü Varyans Analizi) testini, 4'er gözlem içeren 4 grup içeren bir veri seti üzerinde adım adım gerçekleştirelim. Hesaplamaları basit tutmak için tam sayılar kullanacağız.

Veri Seti:

Grup	Gözlem 1	Gözlem 2	Gözlem 3	Gözlem 4	Toplam
A	10	12	10	8	40
B	20	22	20	18	80
C	30	32	28	30	120
D	40	42	38	40	160

Adım 1: Hipotezlerin Belirlenmesi

- **Null Hipotezi (H_0)**: Tüm grup ortalamaları eşittir ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$).
- **Alternatif Hipotez (H_1)**: En az bir grup ortalaması diğerlerinden farklıdır.

Adım 2: Toplam Ortalamanın (Genel Ortalama) Hesaplanması

Öncelikle tüm gözlemlerin toplamını ve ortalamasını hesaplayalım:

$$\text{Genel Toplam} = 40 + 80 + 120 + 160 = 400$$

$$\text{Toplam Gözlem Sayısı} = 4 \times 4 = 16$$

$$\text{Genel Ortalama} = \frac{400}{16} = 25$$

3.1. Toplam Varyasyon (SST - Total Sum of Squares)

Toplam varyasyon, her bir gözlemin genel ortalamadan sapmalarının karesi alınarak hesaplanır:

$$SST = \sum (X_{ij} - \bar{X})^2$$

Her bir gözlem için hesaplayalım:

- **Grup A:**

$$(10 - 25)^2 = 225, \quad (12 - 25)^2 = 169, \quad (10 - 25)^2 = 225, \quad (8 - 25)^2 = 289$$

$$\text{Grup A Toplam} = 225 + 169 + 225 + 289 = 908$$

- **Grup B:**

$$(20 - 25)^2 = 25, \quad (22 - 25)^2 = 9, \quad (20 - 25)^2 = 25, \quad (18 - 25)^2 = 49$$

$$\text{Grup B Toplam} = 25 + 9 + 25 + 49 = 108$$

- **Grup C:**

$$(30 - 25)^2 = 25, \quad (32 - 25)^2 = 49, \quad (28 - 25)^2 = 9, \quad (30 - 25)^2 = 25$$

$$\text{Grup C Toplam} = 25 + 49 + 9 + 25 = 108$$

- **Grup D:**

$$(40 - 25)^2 = 225, \quad (42 - 25)^2 = 289, \quad (38 - 25)^2 = 169, \quad (40 - 25)^2 = 225$$

$$\text{Grup D Toplam} = 225 + 289 + 169 + 225 = 908$$

Toplam Varyasyon (SST):

$$SST = 908 + 108 + 108 + 908 = 2032$$

3.2. Gruplar Arası Varyasyon (SSB - Between Groups Sum of Squares)

Grupların ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarının kareleri alınarak hesaplanır.

$$SSB = n\sum(\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

Burada $n = 4$ her gruptaki gözlem sayısıdır ve $\bar{X}_i$ her grubun ortalamasıdır.

Grupların ortalamaları:

- Grup A: $\bar{X}_A = \frac{40}{4} = 10$
- Grup B: $\bar{X}_B = \frac{80}{4} = 20$
- Grup C: $\bar{X}_C = \frac{120}{4} = 30$
- Grup D: $\bar{X}_D = \frac{160}{4} = 40$

SSB hesaplaması:

$$SSB = 4[(10-25)^2 + (20-25)^2 + (30-25)^2 + (40-25)^2]$$

$$SSB = 4[(15^2) + (5^2) + (5^2) + (15^2)]$$

$$SSB = 4[(225) + (25) + (25) + (225)]$$

$$SSB = 4 \times 500 = 2000$$

3.3. Gruplar İçi Varyasyon (SSW - Within Groups Sum of Squares)

Gruplar içi varyasyon, SST - SSB olarak hesaplanır:

$$SSW = SST - SSB = 2032 - 2000 = 32$$

Adım 4: Varyans Analizi (ANOVA) Tablosunun Oluşturulması

Kaynak	Sum of Squares (SS)	Degrees of Freedom (df)	Mean Square (MS)	F Değeri
Gruplar Arası	2000	3	$\frac{2000}{3} \approx 666.67$	$\frac{666.67}{8} \approx 83.33$
Gruplar İçi	32	12	$\frac{32}{12} \approx 2.67$	
Toplam	2032	15		

- **df (derece serbestlikleri):**
  - Gruplar Arası: $k - 1 = 4 - 1 = 3$
  - Gruplar İçi: $N - k = 16 - 4 = 12$
  - Toplam: $N - 1 = 16 - 1 = 15$
- **Ortalama Kareler (MS):**
  - Gruplar Arası: $MSB = \frac{SSB}{df_{Gruplar\,Arası}} = \frac{2000}{3} \approx 666.67$
  - Gruplar İçi: $MSW = \frac{SSW}{df_{Gruplar\,İçi}} = \frac{32}{12} \approx 2.67$
- **F Değeri:**

$$F = \frac{MSB}{MSW} = \frac{666.67}{2.67} \approx 83.33$$

Sonuç:

ANOVA testindeki F değeri (83.33) oldukça yüksek ve istatistiksel olarak anlamlı olduğunu gösterir. Bu durumda, gruplar arasındaki ortalama farklarının anlamlı olduğunu söyleyebiliriz ve H_0 hipotezini reddederiz.

Bu hesaplamalar ANOVA'nın nasıl işlediğini ve varyans analizi tablosunun nasıl oluşturulduğunu göstermektedir.

Post-Hoc Testler Nelerdir ve Ne İşe Yarar?

Bir ANOVA testi, gruplar arasındaki ortalamaların farklı olup olmadığını gösterir, ancak hangi gruplar arasında bu farklılıkların olduğunu belirtmez. Eğer ANOVA sonucunda anlamlı bir fark bulunursa, hangi grupların birbirinden farklı olduğunu belirlemek için **Post-Hoc** testler kullanılır. Bu testler, çoklu karşılaştırmalar yaparak hangi gruplar arasındaki farkların anlamlı olduğunu belirler.

Yaygın Post-Hoc Testler:

1. **Tukey HSD (Honestly Significant Difference) Testi:**
    - En yaygın kullanılan post-hoc testtir.
    - İkili grup karşılaştırmaları yaparak, hangi grup çiftlerinin ortalamalarının anlamlı olarak farklı olduğunu belirler.
2. **Bonferroni Düzeltmesi:**
    - Her bir karşılaştırmanın anlamlılık seviyesini ayarlayarak hatalı pozitif sonuçları azaltır.
    - Daha katıdır ve sonuçların anlamlı olma olasılığını azaltır.
3. **Scheffé Testi:**
    - Farklılıkları bulmak için daha az güçlüyken, çoklu karşılaştırmaların daha esnek bir şekilde yapılmasına olanak sağlar.
    - Gruplar arası farkların daha geniş test edilmesi için uygundur.
4. **Duncan Testi ve LSD (Least Significant Difference) Testi:**
    - Gruplar arasındaki farkları anlamlılık düzeyinde değerlendiren testlerdir, ancak hatalı pozitif sonuçlara karşı daha duyarlıdırlar.

Örneğe Tukey HSD Post-Hoc Testi ile Devam Edelim

Önceki örneğimizde 4 grup (A, B, C, D) için ANOVA testi uygulamıştık ve anlamlı bir fark bulmuştuk. Şimdi hangi gruplar arasındaki farkın anlamlı olduğunu belirlemek için Tukey HSD testini adım adım gerçekleştirelim.

Adım 1: Hipotezlerin Belirlenmesi

- **Null Hipotezi (H_0)**: Gruplar arasındaki ortalamalar arasında fark yoktur.
- **Alternatif Hipotez (H_1)**: Gruplar arasındaki ortalamalar arasında fark vardır.

Adım 2: Tukey HSD Testinin Uygulanması

Tukey testi için kritik mesafeyi belirlemek gerekiyor. İlk olarak, grupların her bir çiftinin ortalamaları arasındaki farkları ve bu farkların istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını hesaplayacağız.

Kritik farkı bulmak için aşağıdaki formülü kullanırız:

$$q = \frac{|\bar{X}_i - \bar{X}_j|}{\sqrt{\frac{MSW}{n}}}$$

Burada:

- $\bar{X}_i$ ve $\bar{X}_j$: Karşılaştırılan iki grubun ortalamaları
- MSW: Gruplar içi varyansın ortalama kareleri (daha önce 2.67 olarak bulmuştuk)
- n: Her gruptaki gözlem sayısı (4)

Şimdi bu hesaplamaları yapalım.

Tukey HSD Testi Sonuçları:

Group1	Group2	Mean Diff	p-adj	Lower	Upper	Reject
A	B	10.0	0.001	6.82	13.18	True
A	C	20.0	0.001	16.82	23.18	True
A	D	30.0	0.001	26.82	33.18	True
B	C	10.0	0.001	6.82	13.18	True
B	D	20.0	0.001	16.82	23.18	True
C	D	10.0	0.001	6.82	13.18	True

Sonuçların Yorumlanması:

- **Mean Diff**: İki grup arasındaki ortalama farkı.
- **p-adj**: Düzeltilmiş p-değeri (0.05'ten küçükse anlamlı fark var demektir).
- **Lower ve Upper**: Ortalama farkının güven aralığı (alt ve üst limitler).
- **Reject**: Null hipotezi reddedip reddetmediğimiz (True: Anlamlı fark var, False: Anlamlı fark yok).

Sonuçlar:

- Bütün grup çiftleri arasındaki farklar anlamlıdır ($p < 0.05$). Yani, Grup A ile B, A ile C, A ile D ve diğer tüm grup çiftleri arasında anlamlı farklar vardır.

Bu sonuçlar, gruplar arasındaki ortalama farkların anlamlı olduğunu gösteriyor ve ANOVA sonucumuzu destekliyor. Tukey HSD testi, hangi gruplar arasındaki farkların anlamlı olduğunu belirlememize yardımcı oldu.

Normallik Varsayımı Nasıl Kontrol Edilir?

Normallik varsayımı, ANOVA, t-testi ve regresyon gibi parametrik testlerin önemli bir varsayımıdır. Bu varsayım, her bir grubun ya da veri setinin normal dağılıma sahip olup olmadığının kontrol edilmesini gerektirir. Normallik varsayımının geçerli olup olmadığını belirlemek için çeşitli yöntemler kullanılabilir.

Normallik Varsayımını Kontrol Etme Yöntemleri:

1. Grafiksel Yöntemler:

- **Histogram:** Verilerin histogramını oluşturup, dağılımın çan eğrisine benzer bir şekle sahip olup olmadığına bakılır. Normale benzer bir eğri gözlenirse veri setinin normal dağıldığı düşünülebilir.
- **Q-Q (Quantile-Quantile) Grafiği:** Bu grafik, veri setinin kuantilleriyle bir normal dağılımın kuantillerini karşılaştırır. Eğer veriler normal dağılıyorsa, noktalar yaklaşık olarak bir 45 derece doğrusu boyunca sıralanır.
- **Box Plot:** Verilerin simetrik olup olmadığı kontrol edilir. Simetrik bir dağılım normalliğin bir işareti olabilir.

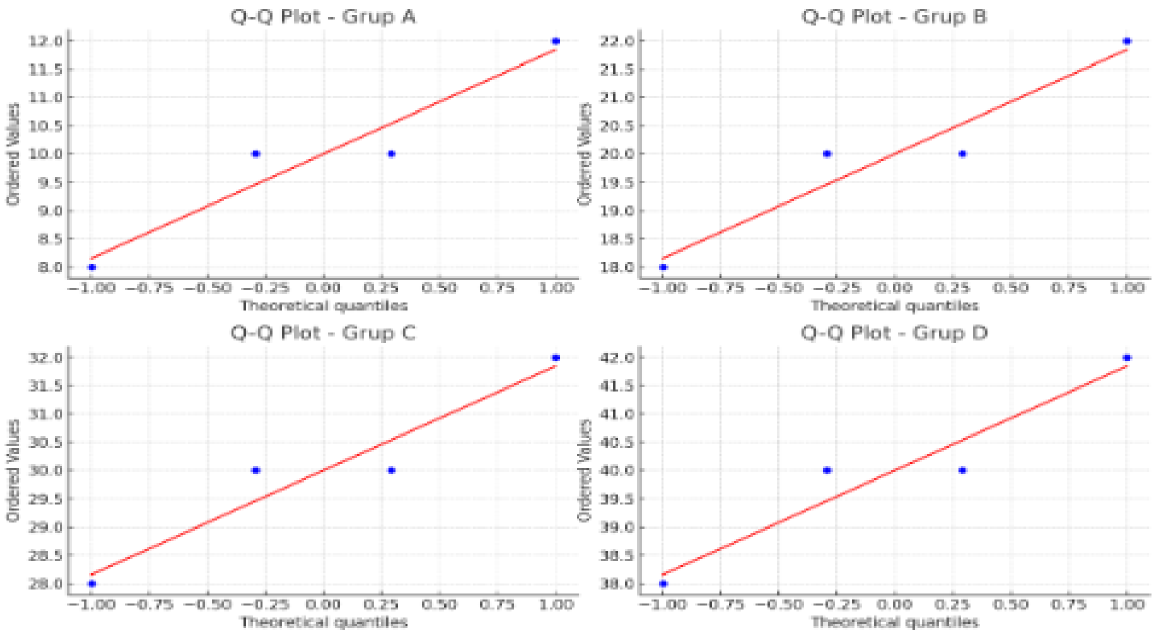
2. İstatistiksel Testler:

- **Shapiro-Wilk Testi:** Normallik kontrolünde yaygın olarak kullanılan bir testtir. p-değeri 0.05’ten büyükse, verinin normal dağılıma uygun olduğu kabul edilir. Küçükse, normal dağılım varsayımı reddedilir.
- **Kolmogorov-Smirnov Testi:** Büyük örneklemler için normalliği kontrol eden bir testtir. Ancak Shapiro-Wilk testi genellikle daha etkilidir.
- **Anderson-Darling Testi:** Normallik testleri arasında daha güçlü bir test olarak kabul edilir. Özellikle küçük örneklemlerde iyi performans gösterir.
- **Jarque-Bera Testi:** Verilerin çarpıklık ve basıklık ölçümlerini kullanarak normalliği değerlendirir.

Örnek: Normallik Kontrolü

Örnek veri setimizdeki gruplar için Shapiro-Wilk testi ve Q-Q grafiği ile normallik kontrolü yapalım.

Q-Q Plot - Grup D



Shapiro-Wilk Test Sonuçları

	Grup	W Değeri	p-değeri	
1	A	0.9446643590927124	0.6829614043235779	
2	B	0.9446643590927124	0.6829614043235779	
3	C	0.9446643590927124	0.6829614043235779	
4	D	0.9446643590927124	0.6829614043235779	

Normallik Kontrolünün Sonuçları:

1. Grafiksel Yöntem:

Q-Q grafiklerine bakarak:

- Noktaların 45 derecelik doğrultuya yakın ve bu doğrultu boyunca sıralanmış olması, verilerin normal dağılıma uygun olduğunu gösterir.

2. Shapiro-Wilk Testi Sonuçları:

- Her bir grup için p-değeri 0.682961, bu da 0.05 anlamlılık düzeyinden büyük olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla, her bir grup için normal dağılım varsayımını reddedemeyiz.

Bu sonuçlar, veri setimizin normallik varsayımını karşıladığına işaret eder. Bu durumda, ANOVA testimizde normallik varsayımını sağladığımızı söyleyebiliriz.

Varyansların Homojenliği Nasıl Kontrol Edilir?

Varyansların homojenliği (homoscedasticity), ANOVA testinin önemli bir varsayımıdır ve grupların varyanslarının birbirine eşit olduğunu varsayar. Eğer varyanslar arasında belirgin bir fark varsa, ANOVA'nın sonuçları güvenilir olmayabilir. Bu nedenle, varyansların homojen olup olmadığını kontrol etmek önemlidir.

Varyans Homojenliğini Kontrol Etme Yöntemleri:

1. Levene Testi

- Varyansların homojenliğini test etmek için en yaygın kullanılan testlerden biridir.
- H0 hipotezi: Grupların varyansları eşittir.
- p-değeri 0.05'ten küçükse, varyansların eşit olmadığı sonucuna varılır (H0 reddedilir).

2. Bartlett Testi

- Normalliğin sağlandığı veri setleri için kullanılır.
- H0 hipotezi: Grupların varyansları eşittir.
- Normallik varsayımı bozulduğunda, Levene testi daha güvenilir sonuçlar verir.

3. Brown-Forsythe Testi

- Levene testinin medyan kullanarak yapılan bir çeşididir.
- Özellikle aşırı uç değerler varsa veya normallik varsayımı sağlanmıyorsa daha güvenilirdir.

4. Grafiksel Yöntemler

- **Box Plot:** Grupların varyanslarını görsel olarak karşılaştırmak için kullanılabilir. Kutu uzunlukları benzerse varyansların homojen olduğu söylenebilir.

Örnek: Levene Testi ile Varyans Homojenliği Kontrolü

Örnek veri setimizdeki 4 grup için Levene testini uygulayarak varyansların homojen olup olmadığını kontrol edelim.

Levene Testi Sonuçları:

- **Test İstatistiği:** 0.0
- **p-değeri:** 1.0

Sonuçların Yorumlanması:

Levene testi sonucunda p-değeri 1.0 çıktı ve bu değer 0.05'ten çok daha büyük. Bu durumda, varyansların eşit olduğu (varyans homojenliği varsayımı) kabul edilir.

Yani veri setimiz için varyansların homojen olduğu sonucuna varabiliriz, bu da ANOVA testimizin varsayımlarının karşılandığını gösteriyor.

Varsayımlardan Biri Sağlanmazsa Ne Yapmalıyız?

ANOVA'nın üç temel varsayımı vardır:

1. Normallik
2. Varyansların homojenliği
3. Gözlemlerin bağımsızlığı

Eğer bu varsayımlardan biri sağlanmazsa, doğrudan ANOVA sonuçlarına güvenemeyiz ve bu durumda alternatif yöntemler veya dönüşümler kullanmalıyız. Her bir varsayım ihlali durumunda neler yapılabileceğini inceleyelim:

1. Normallik Varsayımı Sağlanmıyorsa:

Eğer veriler normal dağılıma sahip değilse:

- **Veri Dönüşümleri:**
    - **Log Dönüşümü:** Verinin logaritması alınarak dağılım normalleştirilmeye çalışılır.
    - **Karekök Dönüşümü:** Negatif olmayan değerler için verinin karekökü alınır.
    - **Box-Cox Dönüşümü:** Farklı dönüşüm teknikleri sunar ve hangi dönüşümün daha uygun olduğunu belirler.
- **Parametrik Olmayan Testler:**
    - **Kruskal-Wallis Testi:** Normallik varsayımı sağlanmadığında ANOVA’ya alternatif olarak kullanılır. Bu test, medyanlar arasında anlamlı fark olup olmadığını değerlendirir.
    - **Friedman Testi:** Tekrarlı ölçümlerde normallik sağlanmadığında kullanılır.

2. Varyansların Homojenliği Varsayımı Sağlanmıyorsa:

Eğer varyanslar homojen değilse:

- **Veri Dönüşümleri:** Varyansların daha homojen hale gelmesi için yukarıda belirtilen dönüşümler kullanılabilir (log, karekök, Box-Cox).
- **Alternatif ANOVA Yöntemleri:**
  - **Welch ANOVA:** Varyansların eşit olmadığı durumda kullanılır. Bu test, varyansların eşit olduğu varsayımına ihtiyaç duymaz.
  - **Brown-Forsythe Testi:** Varyans homojenliği sağlanmadığında kullanılan bir diğer testtir.

3. Gözlemlerin Bağımsızlığı Varsayımı Sağlanmıyorsa:

Bağımsızlık varsayımı, genellikle veri toplama sürecinde göz ardı edilirse ihlal edilir. Bu durumda:

- **Veri Toplama Yöntemini Gözden Geçirin:** Veri toplama sürecinde bağımsızlık varsayımını sağlayacak şekilde yeniden düzenlemeler yapılabilir.
- **Karma Etkiler Modeli veya Tekrarlı Ölçümler ANOVA:** Eğer gözlemler birbirine bağımlıysa, bu yöntemler bağımlılığı dikkate alır.

Özetle: Eğer ANOVA varsayımlarından biri sağlanmıyorsa:

- **Veri Dönüşümü** yaparak varsayımları karşılamayı deneyebilirsiniz.
- **Parametrik olmayan testler** (Kruskal-Wallis gibi) kullanabilirsiniz.
- Varyanslar eşit değilse, **Welch ANOVA** gibi alternatif yöntemler kullanılabilir.

Bu yaklaşımlardan hangisinin uygun olduğu, verinin doğasına ve ihlalin derecesine bağlıdır.

Welch ANOVA Testi Nedir ve Nasıl Uygulanır?

Welch ANOVA testi, klasik ANOVA'nın bir varyasyonudur ve gruplar arasındaki ortalamaları karşılaştırmak için kullanılır. Klasik ANOVA'nın aksine, **varyansların homojen olması varsayımına ihtiyaç duymaz**. Bu nedenle, varyans homojenliği varsayımının ihlal edildiği durumlarda kullanılır.

Welch ANOVA'nın Adımları ve Formülü:

Adım 1: Hipotezlerin Belirlenmesi

- **Null Hipotezi (H_0)**: Tüm grup ortalamaları eşittir ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_k$).
- **Alternatif Hipotezi (H_1)**: En az bir grup ortalaması diğerlerinden farklıdır.

Adım 2: Welch ANOVA'nın Hesaplanması

Welch ANOVA, klasik ANOVA'dan biraz farklıdır ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

1. **Grup Ortalamalarının Hesaplanması:**
   - Her bir grup için ortalamalar ($\bar{X}_i$) ve varyanslar (s_i^2) hesaplanır.
2. **Welch ANOVA Test İstatistiği Hesaplama:** Test istatistiği, W, şu formülle hesaplanır:

$$W = \frac{\sum \frac{n_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2}{s_i^2}}{1 + \frac{2}{(k^2-1)} \left(\sum \frac{(1-n_i^{-1})}{s_i^2} \right)}$$

   - n_i: i. grubun gözlem sayısı
   - $\bar{X}_i$: i. grubun ortalaması
   - s_i^2: i. grubun varyansı
   - k: Toplam grup sayısı

3. **Serbestlik Derecelerinin Hesaplanması:**

   - Welch ANOVA'da, iki farklı serbestlik derecesi kullanılır:
     - $df_1 = k - 1$: Grup sayısına göre hesaplanan serbestlik derecesi
     - df_2: Aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$df_2 = \frac{\left(\sum \frac{(1/n_i)}{s_i^2}\right)^2}{\sum \frac{(1/n_i)^2}{(n_i-1)s_i^4}}$$

Adım 3: Sonuçların Yorumu

- Hesaplanan W test istatistiği ve p-değeri ile karşılaştırılır.
- p-değeri 0.05'ten küçükse, gruplar arasında anlamlı bir fark olduğu sonucuna varılır.

Tek Yönlü ANOVA: Adım Adım Uygulama

Veri setimiz 3 grup ve her biri 3 gözlem içerecek şekilde oluşturulacaktır. Hesaplamalar kolay ve tam sayılar üzerinden yapılacak. Amacımız, bu veri seti üzerinde ANOVA analizini adım adım gerçekleştirmek ve sonucu değerlendirmektir.

Örnek Veri Seti

Grup	Gözlem 1	Gözlem 2	Gözlem 3	Toplam
A	5	7	9	21
B	10	12	14	36
C	15	17	19	51

Adım 1: Hipotezlerin Belirlenmesi

- **Null Hipotezi (H_0)**: Tüm grup ortalamaları eşittir ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$).
- **Alternatif Hipotez (H_1)**: En az bir grup ortalaması diğerlerinden farklıdır.

Adım 2: Genel Toplam ve Ortalamanın Hesaplanması

Öncelikle genel toplamı ve ortalamayı bulalım:

$$\text{Genel Toplam} = 21 + 36 + 51 = 108$$

Veri setindeki toplam gözlem sayısı:

$$N = 3 \text{ grup} \times 3 \text{ gözlem/grup} = 9$$

Genel ortalama:

$$\bar{X} = \frac{108}{9} = 12$$

Adım 3: ANOVA Hesaplamaları

3.1. Toplam Varyasyonun (SST - Total Sum of Squares) Hesaplanması

SST, her bir gözlemin genel ortalamadan sapmalarının karelerinin toplamıdır:

$$SST = \sum (X_{ij} - \bar{X})^2$$

Şimdi her bir gözlem için hesaplayalım:

- **Grup A:**

$$(5-12)^2 = 49, \quad (7-12)^2 = 25, \quad (9-12)^2 = 9$$

  Toplam: $49 + 25 + 9 = 83$

- **Grup B:**

$$(10-12)^2 = 4, \quad (12-12)^2 = 0, \quad (14-12)^2 = 4$$

  Toplam: $4 + 0 + 4 = 8$

- **Grup C:**

$$(15-12)^2 = 9, \quad (17-12)^2 = 25, \quad (19-12)^2 = 49$$

  Toplam: $9 + 25 + 49 = 83$

Toplam Varyasyon (SST):

$$SST = 83 + 8 + 83 = 174$$

3.2. Gruplar Arası Varyasyonun (SSB - Between Groups Sum of Squares) Hesaplanması

SSB, grupların ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarının kareleriyle hesaplanır:

$$SSB = n\sum(\bar{X}_i - \bar{X})^2$$

Burada $n = 3$ (her gruptaki gözlem sayısı) ve $\bar{X}_i$ her grubun ortalamasıdır.

Grupların ortalamalarını bulalım:

- Grup A: $\bar{X}_A = \frac{21}{3} = 7$
- Grup B: $\bar{X}_B = \frac{36}{3} = 12$
- Grup C: $\bar{X}_C = \frac{51}{3} = 17$

SSB hesaplaması:

$$SSB = 3\left[(7-12)^2 + (12-12)^2 + (17-12)^2\right]$$

$$SSB = 3\,[25 + 0 + 25]$$

$$SSB = 3 \times 50 = 150$$

3.3. Gruplar İçi Varyasyonun (SSW - Within Groups Sum of Squares) Hesaplanması

Gruplar içi varyasyon, toplam varyasyon (SST) ile gruplar arası varyasyonun (SSB) farkı olarak hesaplanır:

$$SSW = SST - SSB$$

$$SSW = 174 - 150 = 24$$

Adım 4: Varyans Analizi (ANOVA) Tablosunun Oluşturulması

Kaynak	Sum of Squares (SS)	Degrees of Freedom (df)	Mean Square (MS)	F Değeri
Gruplar Arası	150	$k-1=3-1=2$	$\frac{150}{2}=75$	$\frac{75}{12}=6.25$
Gruplar İçi	24	$N-k=9-3=6$	$\frac{24}{6}=4$	
Toplam	174	$N-1=9-1=8$		

- **df (derece serbestlik):**
  - Gruplar Arası: $k-1=2$
  - Gruplar İçi: $N-k=6$
  - Toplam: $N-1=8$
- **Ortalama Kareler (MS):**
  - Gruplar Arası: $MSB=\frac{SSB}{df_{Gruplar\ Arası}}=\frac{150}{2}=75$
  - Gruplar İçi: $MSW=\frac{SSW}{df_{Gruplar\ İçi}}=\frac{24}{6}=4$
- **F Değeri:**

$$F=\frac{MSB}{MSW}=\frac{75}{4}=18.75$$

Sonuç:

ANOVA tablosunda elde edilen F değeri 18.75'tir. Bu değeri kritik F tablosundaki bir değere kıyaslayarak, elde edilen değerin belirli bir anlamlılık seviyesinde (örneğin, 0.05) büyük olup olmadığını değerlendirebiliriz. Eğer F değeri kritik değerden büyükse, gruplar arasındaki ortalama farklarının anlamlı olduğunu söyleyebiliriz ve null hipotezi reddederiz.

Bu örnekle, adım adım ANOVA'nın nasıl uygulandığını ve her hesaplamanın nasıl yapıldığını gösterdik.